EXERCICE 1 (3 points)

Soit l'équation différentielle (**E**) : y' + y = x ,
où y désigne une fonction dérivable de la variable réelle x et y' sa dérivée.
1) Résoudre l'équation différentielle (H) : y' + y = 0 .
2) Soit la fonction g définie sur **R** par : g(x) = ax + b. Calculer g'(x) et déterminer a et b pour que g(x) soit solution de l'équation (**E**) . (remarquons que les solutions de **E** vérifient g'(x) + g(x) = x)
3)
a) Le nombre k désignant une constante réelle, on considère la fonction f définie sur **R** par : $f(x) = ke^{-x} + x - 1$. Calculer f'(x) et vérifier que la fonction f est solution de l'équation (**E**) .
b) Déterminer le réel k pour que f(0) = 0 .
4) Dans cette question, on prend k = 1 .
a) Calculer la valeur moyenne m de f sur l'intervalle [0 ; 2] . (voir formulaire)
b) En déduire une valeur approchée de m à 10^{-2} près.

Exercice 2 (5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.
On considère les nombres complexes $z_A = 5 - 5i$ et z_B de module égal à $5\sqrt{2}$ et d'argument égal à $-\frac{7\pi}{12}$, d'images respectives A et B.

1) a) Placer le point A.
b) Calculer le module et un argument de z_A .

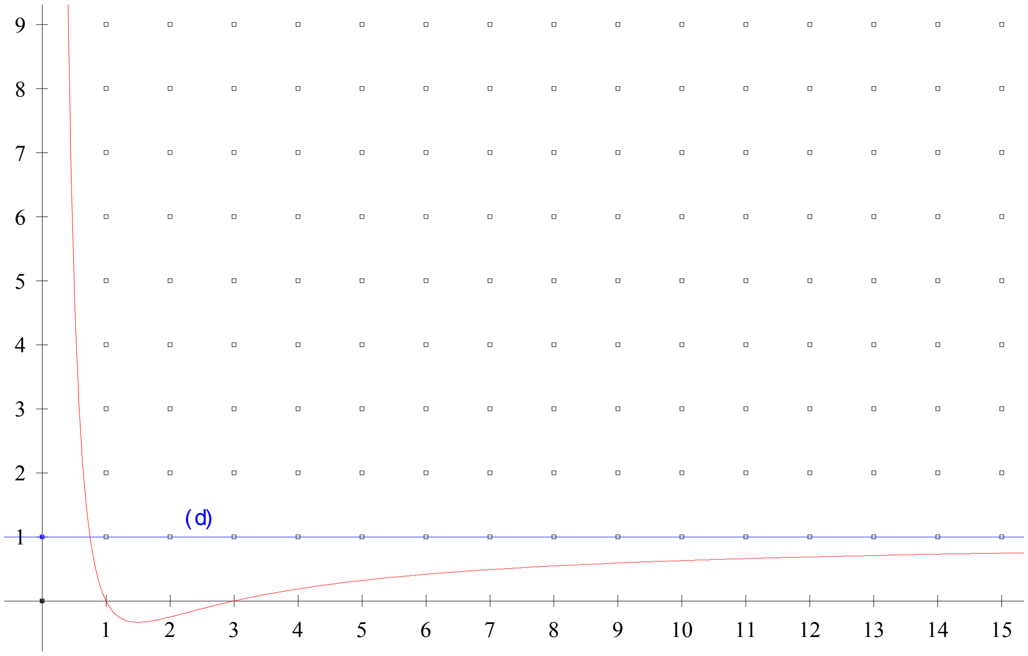
2) Soit la fonction *f* de C dans C définie par $f(z) = z\, e^{-i\frac{\pi}{3}}$
a) Quelle est la transformation géométrique associée à *f* ?
b) Montrer par le calcul que $f(z_A) = z_B$
c) En déduire la construction de B (on laissera les traits de la construction).

3) a) Exprimer $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ sous forme algébrique.
b) Calculer $f(z_A)$ sous forme algébrique.
c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)$.

PROBLEME (12 points)

LES parties A et B sont indépendantes

Partie A : Exploitation d'un graphique
On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ *, dont la représentation graphique (C) obtenue sur l'écran d'une calculatrice est donnée par la figure 1 ci-dessous. On précise que la courbe (C) ne coupe l'axe des abscisses qu'en deux points et qu'elle admet l'axe des ordonnées et la droite (d) qui est parallèle à l'axe des abscisses comme asymptotes.*



1- A partir de cette représentation graphique déterminer :
 a- la limite de g(x) lorsque x tend vers 0;
 b- la limite de g(x) lorsque x tend vers l'infini.

2- Dresser un tableau donnant le signe de g(x) lorsque x décrit l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

3- on admet que $g(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x^2}$ où a, b et c sont trois nombres réels.

 a- En calculant la limite de $\dfrac{ax^2 + bx + c}{x^2}$ lorsque x tend vers l'infini, montrer que : a = 1.
 b- Lire g(1) et g(3) sur le graphique et en déduire un système de deux équations permettant d'obtenir b et c.
 c- Résoudre ce système et exprimer g(x) en remplaçant a, b et c par leurs valeurs.

Partie B

Soit la fonction f définie sur **IR** par : $f(x) = (2x^2 - 5x + 2)\,e^x$. On appelle (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal d'unité graphiques : 2 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées.

a- Calculer les limites de f(x) en $+\infty$ et $-\infty$. En déduire une équation d'une asymptote à la courbe (C).

b- Calculer f ' (x) et étudier son signe.

c- Etablir le tableau de variation de f.

d- Calculer les coordonnées des points N, M et P suivants :

- N est le point d'intersection de (C) avec l'axe des ordonnées.
- M et P sont les points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses ($x_M < x_P$)

e- Déterminer une équation de la droite (D) tangente à la courbe (C) en N.

f- Tracer la courbe (C).

g- Résoudre **graphiquement** l'inéquation d'inconnue x $f(x) > 0$

h- Selon les valeurs du réel k indiquer par **une lecture graphique** quel semble être le nombre de solutions de l'équation d'inconnue x : f(x) = k.