Exercice 1 (5 pts)

*(Dans cet exercice le **.** remplace la multiplication)*

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$) (unité graphique : 8 cm), on considère un point M_0 d'affixe $z_0 = 1$. Soient :

M_1 le point d'affixe $z_1 = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}.z_0$,

M_2 le point d'affixe $z_2 = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}.z_1$,

M_3 le point d'affixe $z_3 = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}.z_2$ et , d'une façon générale

M_{n+1} le point d'affixe $z_{n+1} = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}.z_n$ où n est un entier naturel.

a- Déterminer le module et un argument de z_1, z_2, z_3 et placer les points M_1, M_2, M_3 dans le plan complexe.

b- Pour tout entier naturel n on pose r_n le module de z_n .

1- Déterminer la nature de la suite r_n (*arithmétique ou géométrique, raison..).*

2- Déterminer la somme $S_5 = OM_0 + OM_1 + \ldots + OM5$.

Prouver que pour tout entier naturel n $z_{n+1} - z_n = i\sqrt{3}.z_{n+1}$.

Exercice 2 (5 pts)

Soit f une fonction définie et dérivable sur $]1, +\infty[$. On donne ci-dessous son tableau de variation.

x	1		3		$+\infty$
f '(x)	||	-	0	+	
f (x)	|| $+\infty$	↘	2.5	↗	$+\infty$

De plus on admet que pour tout x élément de $]1, +\infty[$, f(x) peut s'écrire sous la forme

$f(x) = ax + \dfrac{b}{x - c}$, où a, b et c sont trois nombres réels (avec a et b non nuls) que l'on se propose de déterminer à partir des indications fournies par le tableau de variation de f.

On appelle (C) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormal.

a . 1- Utiliser le tableau de variation pour justifier l'existence d'une droite (D) asymptote à (C). Donner une équation de (D).

2-En déduire la valeur de c.

Pour les questions suivantes on prendra c = 1.

b- Le tableau de variation nous fourni les coordonnées d'un point particulier de (C). En déduire une relation entre les nombre a et b.

c- Calculer la dérivée f ' de f . Utiliser le tableau de variation pour trouver une seconde relation entre a et b.

c- Déterminer les nombres a et b.

Problème (10 points)

Partie A

On considère la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : g(x) = x lnx + x + 1

a. Donner l'expression de la dérivée g'(x).
b. Etudier le signe de g'(x) pour tout x appartenant à l'intervalle de définition.
c. Dresser le tableau de variations de la fonction g (sans les limites !).
d. En déduire que sur l'intervalle $]0;+\infty[$ g(x) est strictement positive.

Partie B

On considère la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : f(x) = (x + 1) lnx.

a. Calculer les limites de f(x) aux bornes de l'ensemble de définition.
b. Calculer la dérivée f '(x) et montrer que f '(x) = $\frac{1}{x}$ g(x) (la fonction g(x) de la partie A).
c. Etudier le signe de f '(x) en vous aidant du résultat de la partie A.
d. En déduire le tableau de variations de la fonction f.
e. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) représentative de f au point d'abscisse 1.

Le plan est muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur les ordonnées. Construire soigneusement (C) et (T). On prendra le soin d'écrire sous forme d'un tableau les valeurs qui ont permis le tracé.