Exercice 1 (4 points)

Dans une urne sont placées 4 boules indiscernables au toucher sur lesquelles sont respectivement inscrits les entiers relatifs : -1, +2, -3 et +4.
Un tirage consiste à tirer simultanément 2 boules de l'urne. On suppose les tirages équiprobables.

1. Enumérer tous les tirages possibles.
2. On défini une variable aléatoire X en associant à chaque tirage de deux boules la somme des nombres marqués
   a. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.
   b. Déterminer la loi de probabilité de X.
   c. Calculer la probabilité pour que X soit strictement supérieur à 2
3. Calculer l'Espérance mathématique et l'écart type de X.

Exercice 2 Complexes (4 points)

Le nombre i désigne le nombre complexe de module 1 et dont un argument est $\frac{\pi}{2}$.

1. Déterminer le module et un argument du nombre complexe Z égal à $8\sqrt{2}\,(1+i)$.
2. On considère le nombre complexe Z0 tel que Z0 = $2\sqrt{2+\sqrt{2}} + 2i\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Vérifier que $(Z0)^2$ = Z.
3. Déduire des résultats obtenus aux questions précédentes
   a. Le module et un argument de Z0
   b. les valeurs numériques exactes de cos $\frac{\pi}{8}$ et sin $\frac{\pi}{8}$.

Problème (12 points)

Partie A

On considère la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : g(x) = x lnx + x + 1

a. Donner l'expression de la dérivée g'(x).
b. Etudier le signe de g'(x) pour tout x appartenant à l'intervalle de définition.
c. Dresser le tableau de variations de la fonction g (sans les limites !).
d. En déduire que sur l'intervalle $]0;+\infty[$ g(x) est strictement positive.

Partie B

On considère la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : f(x) = (x + 1) lnx.

a. Calculer les limites de f(x) aux bornes de l'ensemble de définition.
b. Calculer la dérivée f '(x) et montrer qu'elle peut s'exprimer simplement à l'aide de g(x) (celui de la partie A).
c. En déduire le tableau de variations de la fonction f.
d. Donner une équation de la tangente (T) à la courbe (C) représentative de f au point d'abscisse 1.
e. Le plan est muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur les ordonnées. Construire soigneusement (C) et (T).

Partie C

Soit la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par : $F(x) = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\ln x - \left(\frac{x^2}{4} + x\right)$

a. Vérifier que F est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.
b. Justifier le signe de f(x) pour x appartenant à $]1;+\infty[$
c. On appelle A l'aire, exprimée en cm², de la portion du plan limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation x=1 et x=2. Calculer la valeur exacte puis la valeur décimale approchée à 10^{-2} près par défaut de A.