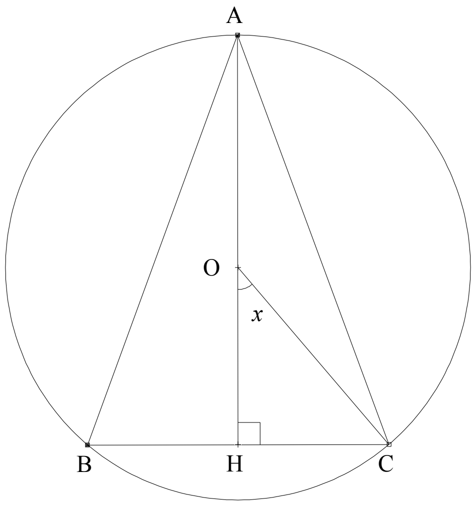
Exercice 1 (4 points)

Un triangle ABC isocèle, de somment principal A, est inscrit dans un cercle de centre O et de rayon 1. H est le pied de la hauteur issue de A.

Soit x la mesure de l'angle en radians HOC ; on suppose $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$



1. a. Exprimer BC et AH en fonction de x (x est la mesure de l'angle).
   b. En déduire en fonction de x l'aire du triangle ABC.

2. On considère la fonction f définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par f(x) = sinx (1 + cosx). Calculer la dérivée f ' de f et montrer que pour tout x appartenant à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $f'(x) = 2(\cos x)^2 + \cos x - 1$.
3. a. Vérifier l'égalité $2(\cos x)^2 + \cos x - 1 = (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$.
   b. déterminer le signe du nombre $m = \cos x - \frac{1}{2}$ suivant les valeur de x, pour x appartenant à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
   c. En déduire le signe de f '(x) suivant les valeurs de x sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
   d. Etablir le tableau de variations de la fonction f.

4. Montrer qu'il existe une valeur de x, que l'on déterminera, pour laquelle l'aire du triangle ABC est maximale. Préciser ce maximum. Quelle est alors la nature du triangle ABC ?

Exercice 2 Complexes (4 points)

Le nombre i désigne le nombre complexe de module 1 et dont un argument est $\frac{\pi}{2}$.

1. Déterminer le module et un argument du nombre complexe Z égal à $8\sqrt{2}\,(1+i)$.
2. On considère le nombre complexe Z0 tel que $Z0 = 2\sqrt{2+\sqrt{2}} + 2i\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Vérifier que $(Z0)^2 = Z$.
3. Déduire des résultats obtenus aux questions précédentes
   a. Le module et un argument de Z0
   b. les valeurs numériques exactes de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

Problème (12 points)

Partie A

On considère la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : g(x) = x lnx + x + 1

a. Donner l'expression de la dérivée g'(x).
b. Etudier le signe de g'(x) pour tout x appartenant à l'intervalle de définition.
c. Dresser le tableau de variations de la fonction g (sans les limites !).
d. En déduire que sur l'intervalle $]0;+\infty[$ g(x) est strictement positive.

Partie B

On considère la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : f(x) = (x + 1) lnx.

a. Calculer les limites de f(x) aux bornes de l'ensemble de définition.
b. Calculer la dérivée f '(x) et montrer qu'elle peut s'exprimer simplement à l'aide de g(x) (celui de la partie A).
c. En déduire le tableau de variations de la fonction f.
d. Donner une équation de la tangente (T) à la courbe (C) représentative de f au point d'abscisse 1.
e. Le plan est muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur les ordonnées. Construire soigneusement (C) et (T).

Partie C

Soit la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par : $F(x) = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\ln x - \left(\frac{x^2}{4} + x\right)$

a. Vérifier que F est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.
b. Justifier le signe de f(x) pour x appartenant à $]1;+\infty[$
c. On appelle A l'aire, exprimée en cm², de la portion du plan limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation x=1 et x=2. Calculer la valeur exacte puis la valeur décimale approchée à 10^{-2} près par défaut de A.